

Interrogation rapide n° 3

1 heure

	Cours	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	BONUS
Total	8	4	3	5	2

I Questions de cours

1. Donner la propriété liant les congruences et la division euclidienne.
2. Démontrer la propriété ci-dessus.
3. Donner la propriété concernant la compatibilité des congruences avec la multiplication.

II Exercices

Exercice 1

On note 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α , β les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1711$$

1. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta1\alpha}^{12}$
Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.
2. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131$.
Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.
3. Soit un entier naturel N dont l'écriture en base 12 est :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

- (a) Démontrer qu'il existe un entier naturel k tel que $N = 3k + a_0$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.
- (b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

Exercice 2

1. Montrer que 6^2 est congru à 1 modulo 7
2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $451 \times 6^{43} - 912$ par 7

Exercice 3

1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que $5x \equiv 4 \pmod{8}$
2. En déduire l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$\begin{cases} 3x - 4y \equiv 2 \pmod{8} \\ x + 2y \equiv 1 \pmod{8} \end{cases}$$

BONUS

Le but de l'exercice est de déterminer tous les couples d'entiers $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2^m - 3^n = 1$

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^n par 8 (on distinguer les cas n pair et n impair).
2. En déduire que si $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ est solution de $2^m - 3^n = 1$, alors $m = 1$ ou $m = 2$ (suivant la parité de n).
3. Déterminer toutes les solutions de l'équation.